Université de Marne La Vallée Licence d'Économie et de Gestion

Feuille d'exercices de Probabilités-2$^{\text{ème}}$ année-2$^{\text{ème}}$ semestre

(L. Le Cor, janvier 2006)

---

1 Rappels

Exercice 1.1

1. Rappeler la définition d'une probabilité.
2. On considère un jeu de tir sur une cible comportant 3 zones 1, 2 et 3. On considère P une probabilité sur Ω l'univers associé à cette expérience telle que $P(\{3\}) = p$, $P(\{2\}) = 2p$ et $P(\{1\}) = 3p$. Pour quelle valeur de p celà est-il possible ?

Exercice 1.2
Soit (Ω, P) un espace probabilisé et deux évènements A et B tels que respectivement les probabilités que A et B se réalise soit égale à $0,08$, et que la probabilité que l'un ou l'autre se réalise soit égale à $0,52$. On suppose que A a deux fois plus de chances de se réaliser que B. Déterminer les probabilités des évènements A et B. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 1.3
Soit un entier $n \in \mathbf{N}^*$. On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces. On suppose les lancers indépendants.

1. Que vaut la probabilité d'obtenir 4 chiffres 6 consécutifs ? Que vaut la probabilité d'obtenir une séquence donnée de trois chiffres ?
2. Que vaut la probabilité d'obtenir 1 fois le chiffre 6 ? k fois le chiffre 6 avec $k = 0, \ldots, 6$?

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 2.1
Soit un entier $n \geq 2$. Pierre a égaré une chaussette dans une commode comportant n tiroirs (distincts), mais il ne sait pas dans lequel elle se trouve et ouvre les n tiroirs au hasard. On note X le numéro dans l'ordre d'ouverture du tiroir contenant la chaussette. Décrire l'expérience, l'univers associé, la variable X et montrer que celle-ci suit une loi uniforme.

Exercice 2.2
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. Calculer $\mathbf{P}(X \leq k)$, pour $k = 0, \ldots, n$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}X$. On rappelle les formules $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2.3

1. Soit X une var suivant la loi $B(n, p)$. Montrer que $n - X$ suit la loi $B(n, 1 - p)$.
2. 100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres dans trois étables E_1, E_2, E_3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Soit X_k la variable définie par le nombre de bovins ayant choisi l'étable E_k.
   (a) Déterminer les lois de probabilités de ces trois variables.
   (b) Déterminer la loi de $X_1 + X_{2.}$.

Exercice 2.4
Un fabricant de machines à laver a observé que, en moyenne, une machine à laver sur dix tombe en panne au cours de la première année d'utilisation, année pendant laquelle la machine est garantie. Plutôt que de faire réparer à ses frais les machines en panne (coût moyen = 300 F par machine réparée), il préfère accorder aux revendeurs une remise de 60 F par machine vendue, les revendeurs se chargeant, en revanche, des réparations éventuelles. Pour un revendeur qui vend n machines, soit X le nombre de machines qu'il lui faut réparer et B le bénéfice (positif ou négatif) dû aux primes et aux réparations.
Quelle est la loi de X ? Exprimer B en fonction de X. Quel est le bénéfice moyen pour le revendeur ? Le système proposé par le fabricant est-il avantageux pour le revendeur ?

Exercice 2.5
Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire 4 boules au hasard et on note X le nombre de boules rouges parmi les 4 tirées.

1. Déterminer la loi de X dans le cas d'un tirage avec replacement, puis d'un tirage sans replacement.
2. Mêmes questions, avec 60 boules rouges et 40 boules blanches. Commentaires ?

Exercice 2.6
On lance un dé équilibré autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir le numéro 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

1. Quelle est la loi de X ? Donner la valeur de son espérance et de sa variance.
2. Soit A_i l'événement "le i-ième lancer n'est pas un 6". Exprimer l'événement $\{X > n\}$ à l'aide des A_i. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X \leq n)$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

3. On lance un dé équilibré autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir le numéro 6 ou le numéro 1.
   (a) Calculer le nombre moyen de lancers effectués.
   (b) Calculer la probabilité que le nombre de lancers effectués soit inférieur ou égal à 5.

Exercice 2.7

1. Soit X une v.a. suivant la loi géométrique de paramètre p. Montrer que pour tous entiers positifs m et n on a
$$\mathbf{P}(X = n + m \mid X > n) = \mathbf{P}(X = m).$$
Interprétation intuitive ?
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X > n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X = n + m \mid X > n) = \mathbf{P}(X = m)$, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$. Montrer que X suit une loi géométrique.

Exercice 2.8
Soit X une v.a.r. suivant la loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$ et $\mathbf{E}\left(u^X\right)$, pour $u \in \mathbf{R}$.

Exercice 2.9
Un fabricant livre des articles qui peuvent présenter des défauts. Le nombre de défauts, pour un article, suit une loi de Poisson de paramètre m.

1. On veut que la probabilité pour qu'il y ait plus que deux défauts sur un article quelconque soit égale à 0,8 %. Déterminer m. (Utiliser les tables).
2. On considère un lot de 100 articles satisfaisant à la condition de la question précédente. Quelle est la probabilité pour que, dans ce lot, il y ait k articles présentant plus de deux défauts ? En utilisant l'approximation de Poisson (à justifier), déterminer la probabilité pour qu'il n'y en ait pas plus de trois présentant plus de deux défauts.

Exercice 2.10
Une firme emploie 200 personnes, chacune téléphonant en moyenne trois minutes par heure. Combien faut-il installer de lignes téléphoniques si on désire que la probabilité que le nombre de lignes soit insuffisant soit inférieure à 2,5% ? On évaluera la probabilité qu'un employé appelle à un instant donné et on utilisera l'approximation par la loi de Poisson.

Exercice 2.11
Le groupe sanguin AB^- est présent chez 0,6% des individus.

1. Lors d'une collecte de sang, on a recueilli 200 flacons. Quelle est la probabilité de trouver parmi ces prélèvements : aucun flacon AB^- ? au moins un flacon AB^- ?

2. Combien faudrait-il faire de prélèvements, pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB^- soit supérieure à : 0,95 ? 0,99 ?

Exercice 2.12
Sachant que 0,2% des sujets présentent une allergie à une vaccination, quelles sont les probabilités que sur 1 000 sujets vaccinés, on constate : 1) aucune allergie, 2) au moins une allergie, 3) plus de 4 allergies.

3 Intégration

Exercice 3.1
Soit trois fonctions : $f : x \mapsto x^3 - x$, et $h : x \mapsto 1 + e^{-2t}$.

1. Déterminer leurs primitives,
2. Calculer leur intégrales sur le segment $[0; 2]$. Interprêter ces intégrales en termes d'aires.

Exercice 3.2
Calculer les intégrales suivantes :

1. A l'aide d'un changement de variable :

$$I_1 = \int_0^1 te^{-t^2}dt \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}\,dx \quad I_3 = \int_1^2 \frac{t}{1+t^2}dx$$

2. A l'aide d'une intégration par parties :

$$I_4 = \int_0^1 xe^{-2x+3}dx \quad I_5 = \int_1^e \ln(x)\,dx \quad I_6 = \int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

Exercice 3.3
Etudier la nature des intégrales suivantes et, dans le cas de la convergence, les calculer, avec :

$$I_1 = \int_0^e x\ln(x)\,dx \quad I_2 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \quad I_3 = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$
$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{t}{1-t^2}dx \quad I_5 = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx \quad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1+t^2}{t^4}dx$$

Exercice 3.4
Etudier la nature des intégrales suivantes sans chercher à les calculer

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x}\,dx \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^2} dx \quad I_3 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \quad I_4 = \int_0^1 \frac{t+1}{t^3+1} dx$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{t+1}{2t+1} dx \quad I_6 = \int_{-\infty}^1 (x+1)\, e^{x^2} dx \quad I_7 = \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$$

4 Variables aléatoires à densité. Fonction de répartition

Exercice 4.1
Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans la suite X est une var de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathbf{P}(|X| > 0,5)$.

Exercice 4.2
On tire un nombre au hasard selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi du premier chiffre après la virgule. Même question avec la loi uniforme sur $[0, 3/2]$.

Exercice 4.3
Soit X une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre 2.
Calculer :

$$\mathbf{P}(X > 2)\,;\ \mathbf{P}(1 < X \leq 2)\,;\ \mathbf{P}(X < 2)\,.$$

Exercice 4.4
Un marchand de jouets suppose que le temps que chaque jouet reste dans sa boutique suit une loi exponentielle. Commenter cette hypothèse. En admettant qu'elle est vérifiée, sachant qu'en moyenne la moitié d'un stock est vendu quatre semaines après la livraison par le fabricant, déterminer le paramètre et calculer la probabilité qu'un jouet reste entre cinq et six semaines dans la boutique.

Exercice 4.5
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $aX + b$ où a et b sont des réels.

Exercice 4.6
Loi de Pareto. Soit r et a deux nombres strictement positifs. On note f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < r$ et $f(x) = ar^a/x^{a+1}$ si $x \geq r$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Cette densité est appelée densité de Pareto.
2. Pour quelles valeurs de a une variable aléatoire X de densité f est-elle intégrable ? de carré intégrable ?
3. Si l'on admet que la répartition des revenus suit une loi de Pareto, exprimer le paramètre a à l'aide du revenu minimum r et du revenu *médian* $\bar{r}$.

Exercice 4.7
Soit X, variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $\dfrac{-\ln(X)}{\lambda}$ où $\lambda > 0$.

Exercice 4.8
La température T journalièrement mesurée dans une ville A a pour moyenne de 12°C avec un écart-type de 10. On suppose que T suit une loi normale.

1. Quelle est la probabilité pour qu'en un jour donné la température soit positive ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'en un jour donné la température soit inférieure à -5°C ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'en un jour donné la température soit comprise entre -5°C et +5°C ?

Exercice 4.9
Soit X une variable aléatoire de loi normale, de moyenne 1 et d'écart-type $0,4$.

1. Calculer : $\mathbf{P}(X < 1,91); \mathbf{P}(X > 0,82); \mathbf{P}(0,82 < X < 1,91); \mathbf{P}(-0,82 < X < 1,91)$.
2. Trouver a tel que : $\mathbf{P}(X > a) = 0,4$ et $c > 0$ tel que : $\mathbf{P}\left((X-1)^2 < c^2\right) \approx 0,866$.

Exercice 4.10
Soit X suivant une loi normale.

1. Sachant que $\mathrm{Var}X = 4$ et $\mathbf{P}(X > 2) = 0,4$ calculer $\mathbf{E}(X)$.
2. Sachant que $\mathbf{E}(X) = -2,5$ et $\mathbf{P}(X < 0) = 0,9$ calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4.11
En introduisant des var judicieusement choisies, et en utilisant une table de la loi normale, calculer :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \quad I_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\frac{-(t+1)^2}{2}} dt$$

Exercice 4.12
Une fabrique produit des tubes électroniques dont en moyenne 1% sont défectueux. On suppose les tubes "indépendants" entre eux. Monsieur A achète 300 tubes. Soit X le nombre de tubes défectueux parmi les 300 tubes de Monsieur A.

1. Quelle est la loi de X ? Donner la valeur de son espérance et de sa variance.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait dans la commande de Monsieur A :
   (a) aucun tube défectueux ;
   (b) exactement un tube défectueux ;
   (c) au moins (au sens large) quatre tubes défectueux.
3. La fabrique garantit ses tubes à 97%.

   Montrer que la probabilité que Monsieur A, après avoir testé ses tubes, revienne à la fabrique pour faire marcher la garantie vaut 0,001 à 10^{-3} près.
4. 1000 personnes achètent chacune 300 tubes à la fabrique.

   Quelle est la probabilité que parmi les 1000 personnes, au plus (au sens large) 3 personnes reviennent à la fabrique faire marcher la garantie ?

5 Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 5.1
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	1	2	3
-1	0,1	0,3	0,1
1	0,2	?	0,2

1. Déterminer les lois marginales et calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathrm{Var}\, X$ et $\mathrm{Var}\, Y$.
2. Calculer la covariance de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$.

Exercice 5.2
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètre p, de tailles respectives n et m.

1. Quelle est la loi de $S = X + Y$?
2. Déterminer la loi de X conditionnée par $\{S = s\}$.
3. Mêmes questions lorsque X et Y suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

NB : On rappelle la formule de Van der Monde : $\sum_k C_n^k C_m^{i-k} = C_{n+m}^i$.

Exercice 5.3
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$p/4$	$q/4$	$p/4$
0	$q/8$	?	$q/8$
1	$p/4$	$q/4$	$p/4$

avec $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Calculer $\mathbf{P}(X = 0, Y = 0)$ et les lois marginales.
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5.4
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
Applications :

1. On lance un dé équilibré autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir deux 6. Soit Z la v.a.r. représentant le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la loi de Z ?
2. Combien de lancers faut-il effectuer en moyenne pour obtenir dix fois la face 6 ?

Exercice 5.5
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules (sans remise) et on note X_1 et X_2 les numéros des boules tirées.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), ainsi que les lois marginales. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Même question pour un tirage avec remise.
2. Calculer le coefficient de corrélation de X_1 et X_2. On rappelle les formules de sommation $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Exercice 5.6
On considère une urne contenant N boules, avec une proportion p de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires. On tire n boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X, dans le cas de tirages avec remise, puis sans remise.
2. On se place dorénavant dans le cas où les tirages se font sans remise. (La loi de X est alors appelée loi hypergéométrique $H(N, n, p)$). On suppose par ailleurs que les boules blanches sont numérotées de 1 à pN. Pour $i \in \{1, ..., pN\}$, on note X_i la v.a.r. qui vaut 1 si la $i^{ème}$ boule blanche se trouve parmi les n boules tirées, 0 sinon.

   (a) Exprimer X en fonction des X_i.
   (b) Déterminer la loi de X_i, pour $i \in \{1, ..., pN\}$.
   (c) Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $Var(X)$.
   N.B. On rappelle que

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

6 Exercices supplémentaires

Exercice 6.1
Soit $n > 2$. n individus jettent chacun une pièce de monnaie équilibrée. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant sur une partie donnée ?

Exercice 6.2
Soit X une variable aléatoire de loi $B(n, p)$.

1. Montrer que, pour $j = 1, \dots n$,
$$\mathbf{P}(X = j) = \frac{n - j + 1}{j} \frac{p}{1 - p} \mathbf{P}(X = j - 1).$$
2. En déduire que $\mathbf{P}(X = j) > \mathbf{P}(X = j - 1)$ si et seulement si $j < (n + 1)p$.

Exercice 6.3
Un skieur S emprunte l'une des N perches d'un téléski. Le nombre X de skieurs qui empruntent ce téléski entre deux passages de S suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité pour que S reprenne la même perche ?

Exercice 6.4
Soit F définie par :
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1/2 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pour } 3 \leq x \end{cases}$$
Vérifier que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. X et déterminer la loi de X.

Exercice 6.5
On note $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Démontrer que $\Gamma(x)$ existe pour $x > 0$ et que $\Gamma(x) > 0$.
2. Soit $x > 0$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Soit f définie par :
$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-u} u^{x-1} & \text{pour } u \geq 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   (b) Soit X une var admettant f comme densité. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6.6
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de X^2 et X^3.

Exercice 6.7
Loi de Rayleigh : Soit f définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ x.e^{-x^2/2} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une var admettant f comme densité. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
3. Déterminer $E(Y)$.

Exercice 6.8
Soit X une var suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On définit $Y = [X] + 1$ où $[X]$ désigne la partie entière de X. Déterminer la loi de Y.

Exercice 6.9

1. Soit X une gaussienne centrée réduite et λ un nombre réel. Calculer $\mathbf{E}\left(e^{\lambda X}\right)$.
2. Dans les modèles utilisés en finance, le cours d'une action à une date future T est représenté par une variable aléatoire S_T de la forme $S_T = S_0 e^Z$, où S_0 est le cours observé aujourd'hui (cours *spot* de l'action) et Z suit une loi normale. Quelle relation la moyenne et la variance de Z doivent-elles vérifier pour que l'on ait $\mathbf{E}(S_T) = S_0$? Exprimer alors la variance de S_T à l'aide de celle de Z.

Exercice 6.10
Soit X une gaussienne centrée réduite. Soit b un nombre réel strictement positif fixé. Déterminer x tel $\mathbf{P}(x < X < x + b)$ soit maximale.

Exercice 6.11
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, donnée par

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer la loi du couple $(X + Y, XY)$, ses lois marginales, $\mathbf{E}(X + Y)$ et $\mathbf{E}(XY)$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, X + Y)$. Les variables aléatoires X et $X + Y$ sont-elles indépendantes ?